Tạp chí Cơ học T.IX, số 2, 1987 (trang 1 – 7)

VỀ NGUYÊN LÝ CỰC TIỂU VÀ CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA LÝ THUYẾT QUÁ TRÌNH BIẾN DẠNG ĐÀN DẺO

ĐÀO HUY BÍCH

Trên cơ sở lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo tính đến giả thuyết xác định địa phương bằng phương pháp khác khảo sát nguyên lý cực tiểu, các định lý tổng quát ứng với quá trình có độ cong trung bình và sự hội tụ của phương pháp tham số đàn hồi thay đổi [1] để giải bài toán biên của lý thuyết dẻo khi đặt tải phức tạp.

Để xem xét vấn đề ta đưa vào không gian hàm Hilbert với chuẩn

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{H}_1} = \int_\Omega \dot{\varepsilon}_{ij}(u)\dot{\varepsilon}_{ij}(u)d\Omega \tag{0.1}$$

Theo định nghĩa, nghiệm suy rộng của bài toán biên lý thuyết dẻo là vecto-hàm $u \in \overset{\circ}{H}_1$ thỏa mãn đồng nhất thức

$$\int_\Omega \dot{\sigma}_{ij}(u)\dot{\varepsilon}_{ij}(v)d\Omega = \int_\Omega \rho \dot{K}_i v_i d\Omega + \int_{S_\sigma} \dot{F}_i v_i ds \tag{*}$$

với mọi $v \in \overset{\circ}{H}_1(v|_{S_u} = 0)$

Ký hiệu $$A^e(v) = \int_\Omega \rho \dot{K}_i v_i d\Omega + \int_{S_\sigma} \dot{F}_i v_i ds$$

phương trình (*) có dạng

$$\int_\Omega \dot{\sigma}_{ij}(u)\dot{\varepsilon}_{ij}(v)d\Omega = A^e(v),\ \forall v \in \overset{\circ}{H}_1. \tag{0.2}$$

Kết hợp phương trình này với các hệ thức vật lý ứng với mỗi quá trình ta giải quyết bài toán đặt ra.

§ 1. QUÁ TRÌNH BIẾN DẠNG CÓ ĐỘ CONG TRUNG BÌNH

Biến thể của các hệ thức ứng với quá trình biến dạng đàn dẻo độ cong trung bình cho ta liên hệ giữa ứng suất và biến dạng dưới dạng ba số hạng [2].

$$\dot{S}_{ij} = \frac{2}{3}\sigma_u k \dot{e}_{ij} + (\Phi' - \sigma_u k)\frac{S_{km}\dot{e}_{km}}{\sigma_u^2} S_{ij} = C_{ijkm}\dot{e}_{km}, \tag{1.1}$$

$$\dot{\sigma} = 3K\dot{e}, \tag{1.2}$$

trong đó $C_{ijkm} = \frac{2}{3}\sigma_u k \delta_{ik}\delta_{jm} + (\Phi' - \sigma_u k)\frac{S_{ij}S_{km}}{\sigma_u^2}$.

Từ cấu trúc của C_{ijkm}, ta thấy rằng nó đối xứng theo cặp i, j, cặp k, m và cặp đôi ij và km, tức là

$$C_{ijkm} = C_{jikm}, \quad C_{ijkm} = C_{ijmk}, \quad C_{ijkm} = C_{kmij}$$

Kết hợp các hệ thức (1.1) và (1.2), ta viết hệ thức giữa tốc độ thay đổi ứng suất $\dot{\sigma}_{ij}$ và tốc độ biến dạng $\dot{\varepsilon}_{ij}$ dưới dạng

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left(C_{ijkm} + K\delta_{ij}\delta_{km} - \frac{1}{3} C_{ijnn}\delta_{km} \right) \dot{\varepsilon}_{km} = D^{o}_{ijkm}\dot{\varepsilon}_{km} \tag{1.3}$$

Dễ dàng chỉ ra, với điều kiện $\Phi' > 0$, $\sigma_{uk} > 0$ và $\sigma_{uk} > \Phi'$, ta có đánh giá

$$\frac{2}{3}\Phi'\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij} < C_{ijkm}\dot{e}_{ij}\dot{e}_{km} < \frac{2}{3}\sigma_{uk}\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij},$$

$$\frac{2}{3}\Phi'\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} < D^{o}_{ijkm}\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{km} \tag{1.4}$$

Theo (1.3), tenxơ tốc độ thay đổi ứng suất $\dot{\sigma}_{ij}$ có thế, tức là tồn tại phiếm hàm W sao cho

$$\frac{\partial W(\dot{\varepsilon})}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} = \dot{\sigma}_{ij}(\dot{\varepsilon})$$

Đặt
$$L(u) \equiv \Phi(u) - A^{e}(u), \qquad \Phi(u) = \int_{\Omega} W d\Omega \tag{1.5}$$

ta đưa (0.2) về phương trình

$$DL\{\dot{\varepsilon}_{ij}(u), \dot{\varepsilon}_{ij}(v)\} \equiv DL(u, v) = 0 \tag{1.6}$$

tức là phiếm hàm L có điểm dừng.

Theo định nghĩa đạo hàm của phiếm hàm ta có

$$Df\{a, b\} \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial a_{ij}} b_{ij}\right] \equiv \frac{d}{d\xi} f(a + \xi b)\Big|_{\xi=0}$$

Xét hàm

$$f(\xi) = \Phi\{u_1 + \xi(u_2 - u_1)\}, \quad 0 < \xi < 1,$$

ta có

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{1}{2} f''(\eta), \quad 0 < \eta < 1,$$

từ đó

$$\Phi(u_2) = \Phi(u_1) + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}(u_1)\,[\dot{\varepsilon}_{ij}(u_2) - \dot{\varepsilon}_{ij}(u_1)]\,d\Omega +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\Omega} \frac{\partial \dot{\sigma}_{ij}}{\partial \dot{\varepsilon}_{km}}\{u_1 + \eta(u_2 - u_1)\}\,[\dot{\varepsilon}_{km}(u_2) - \dot{\varepsilon}_{km}(u_1)]\,[\dot{\varepsilon}_{ij}(u_2) - \dot{\varepsilon}_{ij}(u_1)]\,d\Omega$$

Theo (1.5), (1.6) hệ thức cuối có dạng

$$\Phi(u_2) = \Phi(u_1) + A^{e}(u_2 - u_1) +$$

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} \frac{\partial \dot{\sigma}_{ij}}{\partial \dot{\varepsilon}_{km}}\{u_1 + \eta(u_2 - u_1)\}\,[\dot{\varepsilon}_{km}(u_2) - \dot{\varepsilon}_{km}(u_1)]\,[\dot{\varepsilon}_{ij}(u_2) - \dot{\varepsilon}_{ij}(u_1)]\,d\Omega \tag{1.7}$$

Nguyên lý cực tiểu. Điểm dừng của Lagrăngian L (tức là nghiệm bài toán biên) có cực tiểu.

Chứng minh. Đặt vào (1.7) $u_2 = v \in H_1^\circ$, $u_1 = u$ (nghiệm bài toán biên) ta được

$$L(v) \equiv \Phi(v) - A^e(v) = \Phi(u) - A^e(u) +$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial\dot{\sigma}_{ij}}{\partial\dot{\varepsilon}_{km}}\{u + \eta(v-u)\}\,[\dot{\varepsilon}_{km}(v) - \dot{\varepsilon}_{km}(u)]\,[\dot{\varepsilon}_{ij}(v) - \dot{\varepsilon}_{ij}(u)]\,d\Omega$$

Theo (1.4) ta có

$$L(v) \equiv \Phi(v) - A^e(v) \geqslant \Phi(u) - A^e(u) +$$

$$+ \frac{1}{3}\Phi'\,\|v-u\|^2_{H_1^\circ} \geqslant \Phi(u) - A^e(u) \equiv L(u)$$

Định lý duy nhất nghiệm

Với điều kiện (1.4) bài toán biên có không quá một nghiệm suy rộng.

Chứng minh. Giả sử ngược lại: tồn tại hai nghiệm u_1, u_2, chúng đều thỏa mãn đồng nhất thức (0.2), từ đó ta nhận được

$$\int_\Omega [\dot{\sigma}_{ij}(u_2) - \dot{\sigma}_{ij}(u_1)]\,\dot{\varepsilon}_{ij}(v)d\Omega = 0,\ \forall v \in H_1^\circ \tag{1.8}$$

Ta có $[\dot{\sigma}_{ij}(u_2) - \dot{\sigma}_{ij}(u_1)]\,\dot{\varepsilon}_{ij}(v) =$

$$= \int_0^1 \frac{\partial\dot{\sigma}_{ij}}{\partial\dot{\varepsilon}_{km}}\{u_1 + \xi(u_2 - u_1)\}\,[\dot{\varepsilon}_{km}(u_2) - \dot{\varepsilon}_{km}(u_1)]\,\dot{\varepsilon}_{ij}(v)\,d\xi$$

Đặt vào đây $\dot{\varepsilon}_{ij}(v) = \dot{\varepsilon}_{ij}(u_2) - \dot{\varepsilon}_{ij}(u_1)$

và tính đến (1.4), từ (1.8) suy ra

$$0 = \int_\Omega [\dot{\sigma}_{ij}(u_2) - \dot{\sigma}_{ij}(u_1)]\,[\dot{\varepsilon}_{ij}(u_2) - \dot{\varepsilon}_{ij}(u_1)]\,d\Omega \geqslant \frac{2}{3}\Phi'\,\|u_2 - u_1\|^2_{H_1^\circ}$$

Bất đẳng thức này chỉ có thể thỏa mãn khi $u_2 \equiv u_1$

Chứng minh sự duy nhất của điểm cực tiểu của Lagrăngian được tiến hành như sau: giả sử u_1, u_2 là hai điểm cực tiểu của phiếm hàm L. Khi đó điều kiện (1.8) thỏa mãn và do định lý vừa chứng minh ta có $u_1 = u_2$

§2. QUÁ TRÌNH BIẾN DẠNG PHỨC TẠP

Hệ thức vật lý có dạng [1]

$$\dot{S}_{ij} = -\frac{2}{3}\frac{\sigma_{uf}}{\sin\theta}\dot{e}_{ij} + \left(\frac{\dot{\sigma}_u}{\cos\theta} + \frac{\sigma_{uf}}{\sin\theta}\right)\frac{S_{km}\dot{e}_{km}}{\sigma_u^2}S_{ij} = B_{ijkm}\dot{e}_{km} \tag{2.1}$$

trong đó

$$B_{ijkm}(\sigma_u, \theta, S) = -\frac{2}{3}\frac{\sigma_u f(\sigma_u, \theta, S)}{\sin\theta}\delta_{ik}\delta_{jm} +$$

$$+\left(\frac{\sigma_u'(\sigma_u, \theta, S)}{\cos\theta} + \frac{\sigma_u f(\sigma_u, \theta, s)}{\sin\theta}\right)\frac{S_{ij}S_{km}}{\sigma_u^2}$$

Do biểu thức $\theta = \arccos\frac{S_{ij}\dot{e}_{ij}}{\sigma_u v_u}$, liên hệ $\dot{S}_{ij} \sim \dot{e}_{ij}$ phi tuyến, không có thế.

Kết hợp (2.1) với $\dot{\sigma} = 3K\dot{e}$ ta được

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkm}\dot{\varepsilon}_{km}$$

trong đó $D_{ijkm} = B_{ijkm} + K\delta_{ij}\delta_{km} - \frac{1}{3}B_{ijnn}\delta_{km}$

Để sử dụng các phương pháp đúng dần giải bài toán biên, ta viết hệ thức vật lý (2.1) dưới dạng

$$\dot{S}_{ij} = B_{ijkm}(\sigma_u, \theta, s)\dot{e}_{km} = [C_{ijkm}(\sigma_u, S) - B^*_{ijkm}(\sigma_u, \theta, s)]\dot{e}_{km} \tag{2.2}$$

trong đó
$$B^*_{ijkm} = \frac{2}{3}\psi\delta_{ik}\delta_{jm} + \varphi\frac{S_{ij}S_{km}}{\sigma_u^2},$$

$$\psi = \sigma_u\left(k + \frac{f}{\sin\theta}\right), \quad \varphi = \Phi' - \sigma_u k - \left(\frac{\sigma_u'}{\cos\theta} + \frac{\sigma_u f}{\sin\theta}\right).$$

Đặt (2.2) vào (0.2) ta được

$$\int_\Omega C_{ijkm}\dot{e}_{km}(u)\dot{e}_{ij}(v)d\Omega + \int_\Omega K\dot{\theta}(u)\dot{\theta}(v)d\Omega -$$

$$\int_\Omega B^*_{ijkm}\dot{e}_{km}(u)\dot{e}_{ij}(v)d\Omega = \int_\Omega \rho\dot{K}_i v_i d\Omega + \int_{S_\sigma}\dot{F}_i v_i dS, \ \forall v \in H_1^\circ \tag{2.3}$$

Để tiện cho việc xét hội tụ của các phương pháp đúng dần giải bài toán biên với liên hệ phi tuyến (2.2) ta đưa vào không gian Hilbert

$$H = \{v : v \in (L_2)^3, \dot{\varepsilon}_{ij}(v) \in L_2, v|_{S_u} = 0\}$$

với tích vô hướng

$$(u, v)_H = \int_\Omega C_{ijkm}\dot{e}_{km}(u)\dot{e}_{ij}(v)d\Omega + \int_\Omega K\dot{\theta}(u)\dot{\theta}(v)d\Omega, \tag{2.4}$$

từ đây suy ra chuẩn của không gian này

$$\|u\|_H^2 = \int_\Omega C_{ijkm}\dot{e}_{km}(u)\dot{e}_{ij}(u)d\Omega + \int_\Omega K\dot{\theta}^2(u)d\Omega \tag{2.4'}$$

Do tính chất của tenxơ C_{ijkm}, biểu thức (2.4) hoàn toàn thỏa mãn các tính chất của chuẩn, hơn nữa ta có,

$$\frac{2}{3}\Phi'\|u\|_{H_1^\circ} \leqslant \|u\|_H \leqslant K\|u\|_{H_1^\circ}$$

suy ra chuẩn (2.4') tương đương với chuẩn (0.1)

Giả sử thỏa mãn điều kiện

$$\rho\dot{K}_i \in L_p(\Omega),\quad p > \frac{6}{5},\quad \dot{F}_i \in L_q(S_\sigma),\quad q > \frac{4}{3}$$

do bất đẳng thức Holder các tích phân vế phải (2.3) tồn tại

Theo định lý nhúng Sobolev, hai tích phân vế phải xác định toán tử $L \in H'$ sao cho

$$L : H \to \mathbf{R}$$

$$v \to (L, v)_H = \int_\Omega \rho\dot{K}_i v_i d\Omega + \int_{S_\sigma} \dot{F}_i v_i dS,\ \forall v \in H$$

Các tích phân vế trái tồn tại do tính chất của không gian H và các hàm giới nội đo được trong Ω tham gia ở biểu thức dưới dấu tích phân. Chúng xác định một phiếm hàm tuyến tính liên tục theo $v \in H$. Theo định lý Riesz tồn tại toán tử $Au \in H'$ sao cho

$$A : H \to H'$$

$$(Au, v)_H = \int_\Omega \dot{\sigma}_{ij}(u)\dot{e}_{ij}(v)d\Omega =$$

$$= \int_\Omega C_{ijkm}\dot{e}_{km}(u)\dot{e}_{ij}(v)d\Omega + \int_\Omega K\dot{\theta}(u)\dot{\theta}(v)d\Omega - \int_\Omega B^*_{ijkm}\dot{e}_{km}(u)\dot{e}_{ij}(v)d\Omega$$

với mọi $v \in H$

Do đó phương trình (2.3) tương đương với phương trình toán tử

$$Au = L,\quad u \in H \tag{2.5}$$

Bây giờ xét hội tụ của phương pháp tham số đàn hồi thay đổi trong lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo [1]

Biểu diễn $Au = \mu(u)u$

trong đó với u cố định, $\mu(u)$ là toán tử tuyến tính

$$\mu(u): H \to H'$$

$$v \to \mu(u)v$$

$$(\mu(u)v, W)_H = \int_\Omega D_{ijkm}(u)\dot{\varepsilon}_{km}(v)\dot{e}_{ij}(W)d\Omega$$

với bất kỳ $u \in H$ cố định và với mọi $v, W \in H$

Khi đó phương trình (2.5) có dạng

$$\mu(u)u = L \tag{2.7}$$

Phương trình tuyến tính

$$\mu(u)v = L,\quad v \in H$$

với $u \in H$ cố định tồn tại nghiệm duy nhất $v \in H$ [3], tức là tồn tại toán tử ngược $[\mu(u)]^{-1}$

Phương trình (2.7) tương đương phương trình sau

$$u = [\mu(u)]^{-1}L \tag{2.8}$$

Ký hiệu Q là toán tử sao cho

$$Q : H \to H$$

$$u \to [\mu(u)]^{-1}L$$

phương trình nhận được tương đương với phương trình

$$u = Qu, \quad u \in H \tag{2.9}$$

Thuật toán của phương pháp tham số đàn hồi thay đổi để giải (2.9) là ở gần đúng thứ k tìm $u^{(k)}$ từ phương trình

$$u^{(k)} = Qu^{(k-1)} = [\mu(u^{(k-1)})]^{-1}L$$

hay là

$$\mu(u^{(k-1)})\, u^{(k)} = L \tag{2.10}$$

Chứng minh sự hội tụ của phương pháp tham số đàn hồi thay đổi cũng tức là chứng minh tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình (2.9) dựa trên tính co của toán tử Q.

Theo (2.10) ta có

$$\mu(u^{(k)})\, u^{(k+1)} - \mu(u^{(k-1)})\, u^{(k)} = 0$$

khi đó

$$(\mu(u^{(k)})u^{(k+1)} - \mu(u^{(k-1)})u^{(k)},\ v)_H = 0$$

Theo (2.6) ta viết hệ thức này dưới dạng

$$\int_\Omega [D_{ijkm}(u^{(k)})\dot{\varepsilon}_{km}(u^{(k+1)}) - D_{ijkm}(u^{(k-1)})\dot{\varepsilon}_{km}(u^{(k)})]\, \dot{\varepsilon}_{ij}(v)d\Omega = 0$$

hay là

$$\int_\Omega [(C_{ijkm} - B^{*(k)}_{ijkm})\, \dot{e}^{(k+1)}_{km}(u) - (C_{ijkm} - B^{*(k-1)}_{ijkm})\, \dot{e}^{(k)}_{km}(u)]\dot{e}_{ij}(v)d\Omega +$$

$$+ K \int_\Omega [\dot{\theta}^{(k+1)}(u) - \dot{\theta}^{(k)}(u)]\, \dot{\theta}(v)d\Omega = 0$$

Nhờ (2.4) viết phương trình nhận được dưới dạng

$$(u^{(k+1)} - u^{(k)},\ v)_H = \int_\Omega [B^{*(k)}_{ijkm}\, \dot{e}^{(k+1)}_{km} - B^{*(k-1)}_{ijkm}\dot{e}^{(k)}_{km}]\dot{e}_{ij}(v)d\Omega$$

Đặt $v = u^{(k+1)} - u^{(k)}$, có thể viết

$$\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|^2_H = \int_\Omega (B^{*(k)}_{ijkm}\dot{e}^{(k+1)}_{km} - B^{*(k-1)}_{ijkm}\, \dot{e}^{(k)}_{km})\, (\dot{e}^{(k+1)}_{ij} - \dot{e}^{(k)}_{ij})\, d\Omega =$$

$$= \int_\Omega [B^{*(k)}_{ijkm}\, (\dot{e}^{(k+1)}_{km} - \dot{e}^{(k)}_{km}) + (B^{*(k)}_{ijkm} - B^{*(k-1)}_{ijkm})\, \dot{e}^{(k)}_{km}]\, (\dot{e}^{(k+1)}_{ij} - \dot{e}^{(k)}_{ij})d\Omega \tag{2.11}$$

Tính đến điều kiện đặt lên B^*_{ijkm}

$$\vec{x}'\, \vec{B}(x'') = \vec{x}^*\, \vec{B}(x^*)$$

$$\vec{x}^* = \mu\vec{x}' + (1-\mu)\vec{x}'', \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1$$

ta viết phương trình (2.11) dưới dạng

$$\| u^{(k+1)} - u^{(k)} \|_H^2 = \int_\Omega B^{*(k)}_{ijkm} (\dot e^{(k+1)}_{km} - \dot e^{(k)}_{km}) (\dot e^{(k+1)}_{ij} - \dot e^{(k)}_{ij}) d\Omega +$$

$$+ \int_\Omega \left[\dot e_{km} \frac{\partial B^*_{ijkm}}{\partial \dot e_{mn}} \right]_{\dot e^*_{km}} (\dot e^{(k)}_{km} - \dot e^{(k-1)}_{km}) (\dot e^{(k+1)}_{ij} - \dot e^{(k)}_{ij}) d\Omega$$

trong đó $\dot e^*_{km} = \mu \dot e^{(k)}_{km} + (1-\mu) \dot e^{(k-1)}_{km}$

Tiếp tục tính toán dẫn đến kết quả đã biết trong [4]

$$\| u^{(k+1)} - u^{(k)} \|_H \leqslant q \| u^{(k)} - u^{(k-1)} \|_H$$

trong đó

$$q = \frac{\max \frac{1}{\Phi'} \left\{ |1 + \cos\theta^*| \left(\left| \frac{1}{\sin\theta^*} \frac{\partial\psi^*}{\partial\theta} \right| + \left| \frac{1}{\sin\theta^*} \frac{\partial\varphi^*}{\partial\theta} \right| |\cos\theta^*| \right) \right\}}{1 - \max \frac{1}{\Phi'} (|\varphi^{**}| + |\psi^{**}|)}$$

Nếu $q < 1$, thì dãy $u^{(k)}$ hội tụ về nghiệm suy rộng của bài toán biên. Bài toán biên phi tuyến tồn tại nghiệm duy nhất.

KẾT LUẬN

1. Bằng một phương pháp khác đã khảo sát nguyên lý cực tiểu, các định lý tổng quát cho bài toán biên tuyến tính đối với tốc độ của lý thuyết dẻo.

2. Làm rõ về mặt bảo đảm toán học và các điều kiện đủ đặt lên hàm vật liệu để sử dụng phương pháp tham số đàn hồi thay đổi giải bài toán biên phi tuyến đối với tốc độ của lý thuyết dẻo khi đặt tải phức tạp.

Địa chỉ
Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội

Nhận ngày 4/11/1986

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ДАО ЗУЙ БИК. О приближённом методе решения краевой задачи теории пластичности при сложном нагружении. Известия Сев. Кав. научн. цент. высш. школы №2, 1983.
2. ДАО ЗУЙ БИК. Модификация соотношений упругопластических процессов средней кривизны. Вестник МГУ, сер. мат. мех., №5, 1981.
3. ĐÀO HUY BÍCH, NGUYỄN CÔNG HỢP. Về sự hội tụ của một phương pháp gần đúng giải bài toán biên của lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo. Tạp chí Cơ học, T. 7, №3, 1985.
4. ĐÀO HUY BÍCH. Những phương pháp gần đúng giải bài toán biên của lý thuyết dẻo khi đặt tải phức tạp. Tạp chí Cơ học, T.7, №4, 1985.

РЕЗЮМЕ

О МИНИМАЛЬНОМ ПРИНЦИПЕ И ОБЩИХ ТЕОРЕМАХ В ТЕОРИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

На основании теории упругопластических процессов деформирования с использованием гипотезы локальной определённости другим подходом рассмотрены минимальный принцип, общие теоремы для процесса средней кривизны (линейная задача относительно скорости) и сходимость метода переменных параметров упругости [1] для решения нелинейной краевой задачи теории пластичности при сложном нагружении.