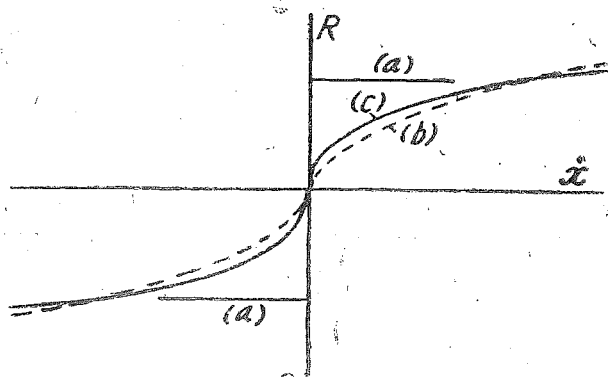


TỰ DAO ĐỘNG DƯỚI ẢNH HƯỞNG CỦA MA SÁT PHI TUYẾN

NGUYỄN VĂN ĐẠO

MA sát Coulomb $R_0 = h_0 \operatorname{sign} x$ (hình 1a) là loại ma sát lý tưởng được biết đến từ lâu. Ảnh hưởng của ma sát này lên hệ tự chấn đã được nghiên cứu trong [1]. Một loại ma sát khác khá gần hiện thực và còn ít được biết tới là ma sát dạng [2]: $R_1 = k\sqrt{|x|} \operatorname{sign} x$ (hình 1, b). Ta còn có thể đưa ra dạng ma sát R_2 sau đây gần về mặt định tính với ma sát R_1 : $R_2 = h\sqrt[3]{x}$ (hình 1, c). Trong bài này sẽ xét ảnh hưởng của các ma sát R_1 , R_2 lên hệ tự chấn Van - de - Pôn.



Hình 1

Như sẽ thấy dưới đây, với những giá trị đủ nhỏ của hệ số k (hoặc h) trong hệ khảo sát có hai trạng thái ổn định: gốc tọa độ và một vòng tới hạn. Trong trường hợp này, tùy thuộc vào điều kiện đầu hệ khảo sát sẽ rơi vào trạng thái yên nghỉ hoặc sẽ thực hiện dao động tuần hoàn với biên độ nhỏ thua biên độ lúc k (hoặc h) bằng không. Với những giá trị k (hoặc h) lớn, trong hệ chỉ tồn tại trạng thái duy nhất ổn định là trạng thái cân bằng.

Các kết luận lý thuyết đã được kiểm tra lại trên máy tương tự và cho những kết quả phù hợp.

§ 1 TỰ CHẤN DƯỚI ẢNH HƯỞNG CỦA MA SÁT R_1

Xét dao động của hệ mô tả bởi phương trình

$$\ddot{x} + x + \varepsilon \alpha (x^2 - 1)x + \varepsilon k \sqrt{|x|} \operatorname{sign} x = 0 \quad (1.1)$$

trong đó α , k là các hằng số dương, ε là tham số bé dương.

Như ta biết, phương trình (1.1) khi $k = 0$ có một nghiệm dừng ổn định, dạng xấp xỉ thứ nhất của nó:

$$x = 2 \cos(t + \delta). \quad (1.2)$$

Trên mặt phẳng pha (x, \dot{x}) nghiệm này tương ứng với một vòng tới hạn ổn định có bán kính $a = 2$ (hình 2). Góc tọa độ $x = x = 0$ là điểm tiêu không ổn định

Để tìm nghiệm của phương trình (1.1) trước hết ta chuyển nó sang dạng chuẩn bằng phép thế biến số:

$$\begin{aligned} x &= a \cos(t + \psi), \\ \dot{x} &= -a \sin(t + \psi), \end{aligned} \quad (1.3)$$

trong đó a và ψ là những biến mới. Thay (1.3) vào (1.1) ta có các hệ thức sau:

$$\begin{aligned} a \sin \varphi + a \dot{\psi} \cos \varphi &= \\ = \varepsilon x (x^2 - 1) \dot{x} + \varepsilon k \sqrt{|x|} \operatorname{sign} x, \\ a \cos \varphi - a \dot{\psi} \sin \varphi &= 0, \quad \varphi = t + \psi. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Từ đây rút ra:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\varepsilon \sin \varphi \cdot [\alpha a (a^2 \cos^2 \varphi - 1) \sin \varphi + k \sqrt{a} |\sin \varphi| \operatorname{sign} \sin \varphi] \\ \dot{\psi} &= \frac{-\varepsilon}{a} \cos \varphi [\alpha a (a^2 \cos^2 \varphi - 1) \sin \varphi + k \sqrt{a} |\sin \varphi| \operatorname{sign} \sin \varphi] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Trong xấp xỉ thứ nhất ta có thể thay (1.5) bởi hệ

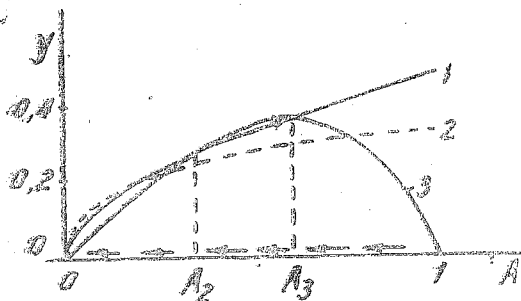
$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon \alpha \left[\frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) - k^* \sqrt{\frac{a}{2}} \right], \\ \dot{\psi} &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ở đây ký hiệu:

$$k^* = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \cdot I \cdot k.$$

$$I = \langle |\sin \varphi|^{3/2} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{3/2} \varphi d\varphi \approx 0.560 \quad (1.7)$$

Để tìm nghiệm dừng $a = a_0$ của phương trình (1.6) ta có thể dùng đồ thị bằng cách tìm giao điểm của các đường cong (hình 3).



Hình 3

$$y = A(1 - A^2), \quad y = k^* \sqrt{A}, \quad A = \frac{a}{2}$$

Ở nửa mặt phẳng $A \geq 0$, nếu $0 < k^* \leq k_c$, ($k_c \approx 0.534$) thì hai đường này sẽ cắt nhau tại 3 điểm

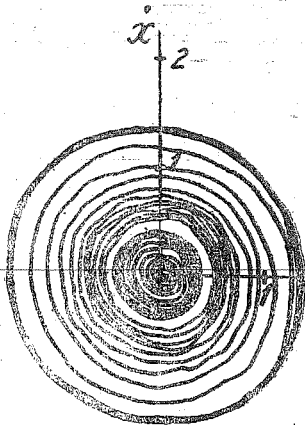
$A_1 = 0, A_2, A_3$ ($0 < A_2 < A_3 < 1$). Với $k^* > k_c$ thì nghiệm dừng duy nhất của (1.6) là $a = 0$. Trên hình 3, đường cong 1 là đường $y = 0.504 \sqrt{A}$, đường 2 là $y = 0.352 \sqrt{A}$ và đường 3 là $y = A(1 - A^2)$.

Nếu gọi vế phải của phương trình đầu của (1.6) là $S(a)$, thì dễ thấy rằng

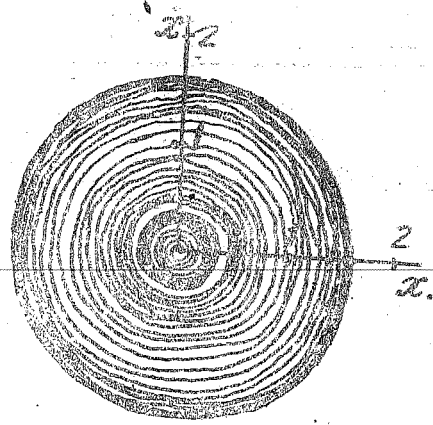
$$S'(0) < 0, \quad S'(A_2) > 0, \quad S'(A_3) < 0 \quad (1.8)$$

Do vậy, nghiệm $A = 0$ là ổn định. Nghiệm dừng $A = A_2$ cũng ổn định. Nghiệm $A = A_3$ không ổn định. Trên mặt phẳng pha (x, \dot{x}) ta có các trạng thái dừng: gốc 0 (ổn định), vòng tới hạn $A = A_2$ (không ổn định) và vòng tới hạn $A = A_3$ (ổn định). Tùy thuộc vào điều kiện đầu, hệ khảo sát sẽ rơi vào trạng thái nghỉ hoặc thực hiện dao động tuần hoàn với biên độ $a = 2A_3$.

Để kiểm tra lại các kết quả lý thuyết chúng tôi đã tiến hành mô hình hóa phương trình (1.1) trên máy tương tự MEDA 41-TC cho trường hợp $\varepsilon\alpha = 0.1$, $\varepsilon h = 0.064$ ($h^* = 0.504$) Quỹ đạo pha đã được ghi lại trên hình 4. Ở đây biên độ dao động đo được là 1.31. Theo đồ thị tính toán lý thuyết (h.3) ta có $A_3 = \frac{a_3}{2} = 0.6$, $a_3 = 1.20$. Như vậy thực nghiệm cho kết quả phù hợp với lý thuyết.



Hình 4



Hình 5

§ 2. TỰ CHẤN DƯỚI ẢNH HƯỞNG CỦA MA SÁT R_2

Ta xét phương trình:

$$\ddot{x} + x + \varepsilon\alpha(x^2 - 1)\dot{x} + \varepsilon h \sqrt[3]{x} = 0, h > 0. \quad (2.1)$$

Nếu thực hiện phép biến đổi (1.3) ta sẽ có:

$$a = -\varepsilon \sin\varphi [\alpha (a^2 \cos^2\varphi - 1) \sin\varphi + h \sqrt[3]{a \sin\varphi}], \quad (2.2)$$

$$\psi = -\frac{\varepsilon}{a} \cos\varphi [\alpha (a^2 \cos^2\varphi - 1) \sin\varphi + h \sqrt[3]{a \sin\varphi}]$$

Trong xấp xỉ thứ nhất ta thay vế phải của (2.2) bằng các giá trị trung bình của nó:

$$a = \varepsilon \alpha \left[\frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{2} \right) - h^* \sqrt[3]{\frac{a}{2}} \right], \quad (2.3)$$

$$\psi = 0$$

trong đó:

$$h^* = \frac{1}{\alpha} \sqrt[3]{2} J . h$$

$$J = \langle \sin^{4/3} \varphi \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{4/3} \varphi d\varphi \approx 0,567.$$

Bây giờ nghiệm dừng sẽ được xác định bởi giao điểm của các đường $y = A(1 - A^2)$ và $y = h^* \sqrt[3]{A}$ (xem hình 3).

Cũng tương tự như trường hợp đã xét trong §1, ở đây với những giá trị lớn của h^* trong hệ khảo sát tồn tại trạng thái dừng duy nhất là trạng thái cân bằng. Với những giá trị nhỏ của h^* ta sẽ có 3 nghiệm dừng:

$A_1 = 0$ (ổn định), A_2 (không ổn định) A_3 (ổn định).

Kết luận lý thuyết trên đây cũng đã được kiểm tra lại trên máy tương tự MEDA 41 TC. Kết quả mô hình hóa phương trình (2.1) với $\sigma_2 = 0,1$, $\sigma_3 = 0,05$ ($h^* = 0,352$) cho trên hình 5. Ở đây biên độ dao động là 1,58; trong khi tính toán lý thuyết (h.3) cho $A_3 = \frac{a}{2} = 0,75$, $a = 1,50$. Như vậy các kết quả thực nghiệm và lý thuyết phù hợp nhau.

§ 3. KẾT LUẬN

1. Các ma sát khô dưới dạng (0.1), (0.2) làm giảm biên độ tự chấn. Với các giá trị đủ lớn của ma sát nói trên hiện tượng tự chấn sẽ bị dập tắt. Về mặt định tính các kết quả này cũng tương tự như trường hợp ma sát Cu lông.

2. Các ma sát khô (0.1), (0.2) với đường đặc trưng (hình 1) có tiếp tuyến tại gốc thẳng đứng đã làm ổn định trạng thái cân bằng của hệ tự chấn một bậc tự do.

Địa chỉ:
Viện Khoa học Việt nam

Nhận ngày 28/12/1981

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. TONDL A. Quenching of self - excited vibrations. Effect of dry friction. Sound and Vibration, N2, 22, 1976.

2. OSINSKI Z., SADO D. Badanie drgan przy tlumieniu subwiskotycznym. Prace Naukowe Instytutu podstaw konstrukcji maszyn. Politechniki Warszawskiej, N1, 1971.

SUMMARY

SELF - EXCITED OSCILLATION UNDER THE INFLUENCE OF NON - LINEAR FRICTIONS

In this article the influence of frictions R_1 , R_2 on Van der Pol oscillator is considered. It turned out that the mentioned frictions decrease the amplitude of self - excited oscillations and they stabilize the equilibrium position of the self-excited system.